EPREUVE DE MATHEMATIQUES APPLIQUEES et ALGORITHMIQUE

Durée : 3 heures

Partie I : Nombre de changements de signe d'une suite finie de réels.

Définition 1 : soit $(a_i)_{0\leq i\leq n}$ une suite finie de nombres réels. Le nombre de changements de signe de cette suite, noté $V(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, est défini récursivement par :

- si $n = 0$, $V(a_0) = 0$
- sinon

$$V(a_0,\ldots,a_n) = V(a_0,\ldots,a_{n-1}) \text{ si } (a_0,\ldots,a_{n-1}) = (0,\ldots,0)$$
$$\text{ou si } \begin{cases} a_{n-1} = a_{n-2} = \cdots = a_{n-p+1} = 0, \\ a_{n-p} \neq 0, \\ \text{et } a_{n-p}a_n \geq 0, \end{cases}$$
$$= V(a_0,\ldots,a_{n-1}) + 1 \text{ sinon.}$$

Question 1 : Exemples et propriétés.

1-a) Calculer V(-1,2,0,0,2,-3).

1-b) Sur l'exemple précédent, représenter graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des couples $(i, a_i), 0 \leq i \leq 5$. Quelle interprétation peut-on donner de $V(a_0, \ldots, a_n)$ sur un tel graphique ?

1-c) Montrer que :

$$V(a_0,\ldots,a_n) = V(a_r,\ldots,a_n) \text{ si } a_0 = a_1 = \cdots = a_{r-1} = 0$$
$$V(a_0,\ldots,a_n) = V(a_0,a_n) \quad \text{si } a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0.$$

1-d) Soit $(\lambda_i)_{0\leq i\leq n}$ une suite de réels strictement positifs. Montrer que :

$$V(\lambda_0 a_0,\ldots,\lambda_n a_n) = V(a_0,\ldots,a_n).$$

Que peut-on dire si $\lambda_i < 0, 0 \leq i \leq n$?

1-e) Si $a_r \neq 0$, prouver que $V(a_0,\ldots,a_n) = V(a_0,\ldots,a_r) + V(a_r,\ldots,a_n)$. Que peut-on dire dans le cas où $a_r = 0$?

1-f) Prouver que $V(a_0,\ldots,a_n)$ est pair si $a_0 a_n > 0$ et impair si $a_0 a_n < 0$.

Tournez la page S.V.P.

Définition 2 : si $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ désigne un polynôme à coefficients réels, de degré n ($a_n \neq 0$), et I un intervalle de $\mathbb{R}$, on notera $\mathcal{R}(P, I)$ le nombre de racines réelles de P dans l'intervalle I, comptées avec leur multiplicité.

Question 2 : Relation entre nombre de changements de signe et nombre de racines réelles d'un polynôme.

2-a) Calculer $\mathcal{R}(P, \mathbb{R})$ et $\mathcal{R}(P,]0, \infty[)$, pour $P(X) = (X^2 - 2)(X - 1)^2$.

2-b) On rappelle que la *valuation* du polynôme P désigne l'entier $\min\{k, 0 \leq k \leq n, a_k \neq 0\}$. Si r est la valuation de P, démontrer que $\mathcal{R}(P,]0, \infty[)$ est pair si $a_r a_n > 0$ et impair si $a_r a_n < 0$. En déduire que $V(a_0, \ldots, a_n)$ et $\mathcal{R}(P,]0, \infty[)$ ont même parité.

2-c) On désignera par P' le polynôme dérivé de P. Démontrer que :

$$\mathcal{R}(P',]0, \infty[) \geq \mathcal{R}(P,]0, \infty[) - 1.$$

2-d) En déduire que :

$$\mathcal{R}(P,]0, \infty[) \leq V(a_0, \ldots, a_n).$$

(On pourra utiliser un raisonnement par récurrence.)

2-e) Montrer alors que :

$$\mathcal{R}(P,]-\infty, 0[) \leq V(a_0, -a_1, \ldots, (-1)^n a_n).$$

2-f) Démontrer que :

$$V(a_0, \ldots, a_n) + V(a_0, -a_1, \ldots, (-1)^n a_n) \leq n$$

et en déduire que si toutes les racines de P sont réelles non nulles, alors :

$$\mathcal{R}(P,]0, \infty[) = V(a_0, \ldots, a_n)$$
$$\text{et} \quad \mathcal{R}(P,]-\infty, 0[) = V(a_0, -a_1, \ldots, (-1)^n a_n).$$

2-g) Si $P(X) = X^4 - 2X^3 - X^2 + 4X - 2$, quelles sont les valeurs possibles de $\mathcal{R}(P,]0, \infty[)$ et $\mathcal{R}(P,]-\infty, 0[)$?

Partie II : Suites de Sturm

Définition 3 : soit $(f_0, \ldots, f_m)$ une suite de polynômes à coefficients réels. On dira que c'est une suite de Sturm pour l'intervalle $[\alpha, \beta]$ si :

- $f_0(\alpha) \neq 0$ et $f_0(\beta) \neq 0$,
- $f_m(x) \neq 0$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$,
- s'il existe ξ dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$ tel que $f_0(\xi) = 0$, alors $f_1(\xi) f_0'(\xi) > 0$,
- s'il existe ξ dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$ et k compris entre 1 et m tels que $f_k(\xi) = 0$, alors $f_{k-1}(\xi) f_{k+1}(\xi) < 0$.

Question 3 : Exemples de suites de Sturm.

3-a) Montrer que si $(f_0, \ldots, f_m)$ est une suite de Sturm pour un intervalle $[\alpha, \beta]$ et si $(\lambda_0, \ldots, \lambda_m)$ est une suite de réels strictement positifs, alors $(\lambda_0 f_0, \ldots, \lambda_m f_m)$ est aussi une suite de Sturm pour cet intervalle.

Si A et B sont deux polynômes à coefficients réels, on notera Reste(A, B) le reste de la division euclidienne du polynôme A par le polynôme B.

Soit P un polynôme à coefficients réels. On définit la suite de polynômes (P_ν) par :

- $P_0 = P$,
- $P_1 = P'$,
- $P_{k+1} = -\text{Reste}(P_{k-1}, P_k)$, $\quad \forall k \geq 1$.

3-b) Démontrer qu'il existe un entier $m \geq 1$ tel $P_{m+1} = 0$. Que peut-on alors dire de P_m ?

3-c) On définit alors la suite $f_k = \dfrac{P_k}{P_m}, 0 \leq k \leq m$. Démontrer que la suite $(f_0, \ldots, f_m)$ est une suite de Sturm pour tout intervalle $[\alpha, \beta]$ vérifiant $P(\alpha)P(\beta) \neq 0$.

3-d) Calculer, sur un intervalle $[\alpha, \beta]$ convenable, une suite de Sturm associée à $P(X) = X^4 - 2X^3 - X^2 + 4X - 2$.

3-e) La division euclidienne étant à la base de la construction des suites de Sturm, on se propose d'écrire l'algorithme correspondant. Pour cela, on suppose que l'on représente en machine le polynôme de degré n à coefficients réels $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ par le tableau de $n+2$ réels $n, a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$. Ecrire une procédure ayant pour arguments d'entrée deux tableaux représentant deux polynômes A et B et pour arguments de sortie deux tableaux représentant les deux polynômes Q et R, respectivement quotient et reste dans la division euclidienne de A par B.

Question 4 : Suites de Sturm et nombre de racines réelles d'un polynôme.

Soient P un polynôme à coefficients réels et $[\alpha, \beta]$ un intervalle vérifiant $P(\alpha)P(\beta) \neq 0$. Etant donné les notations du 3-c), on se propose d'étudier la fonction $h(x) = V(f_0(x), \ldots, f_m(x)), \quad x \in [\alpha, \beta]$.

4-a) Soit $\xi \in [\alpha, \beta]$. A quelle condition sur ξ la valeur de h varie-t-elle au voisinage de ξ ? Montrer que la fonction h est constante au voisinage de ξ, si ξ est racine de l'un des polynômes f_j avec $j \geq 1$.

4-b) En déduire que $h(\alpha) - h(\beta)$ est égal au nombre de racines distinctes de P sur $[\alpha, \beta]$.

4-c) Généraliser ce résultat lorsque $\alpha = -\infty$ ou $\beta = \infty$, en donnant un sens à $h(\infty)$ et $h(-\infty)$.

4-d) Calculer $\mathcal{R}(P,]0, \infty[)$ et $\mathcal{R}(P,]-\infty, 0[)$, pour $P(X) = X^4 - 2X^3 - X^2 + 4X - 2$.

Tournez la page S.V.P.

Partie III : Localisation des racines d'un polynôme à coefficients rationnels.

Dans cette partie, on va chercher à *localiser* les racines d'un polynôme P à coefficients rationnels, c'est-à-dire à construire une suite d'intervalles $[\alpha_i, \beta_i]$, les bornes α_i et β_i étant rationnelles, contenant chacun une et une seule racine de P. De tels intervalles seront appelés *intervalles isolants*.

Définitions 4 : soit $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ un polynôme à coefficients complexes, de degré n ($a_n \neq 0$).

On notera :

$$m(P) = \max(|a_i|, 0 \leq i \leq n).$$

Soient $\xi_1, \ldots, \xi_n$ ses n racines complexes, distinctes ou non. On définit :

$$s(P) = \max(|\xi_i|, 0 \leq i \leq n).$$

Question 5 : Quelques majorations du module des racines.

5-a) Si ξ est une racine de P, majorer $|a_n||\xi|^n$ en fonction de $m(P)$. En déduire que :

$$s(P) \leq 1 + \frac{m(P)}{|a_n|}.$$

5-b) Démontrer l'inégalité :

$$s(P) \leq 2\max\left(\frac{|a_{n-1}|}{|a_n|}, \sqrt{\frac{|a_{n-2}|}{|a_n|}}, \ldots, \sqrt[n-1]{\frac{|a_1|}{|a_n|}}, \sqrt[n]{\frac{|a_0|}{|a_n|}}\right).$$

Question 6 : Algorithme de localisation des racines d'un polynôme à coefficients rationnels.

On suppose dans cette question que l'on travaille avec un langage de programmation qui calcule de **façon exacte** sur les nombres rationnels.

6-a) Décrire le principe d'un algorithme construisant une liste exhaustive d'intervalles isolants pour P.

6-b) Montrer que l'on peut améliorer l'algorithme précédent pour donner une approximation rationnelle de chaque racine de P à ϵ près, ϵ étant un rationnel fixé arbitrairement.